Folkwang
Universität der Künste

Digitale Allpassfilter: Funktion, Analyse und Anwendung

ICEM 2022

Hausarbeit

vorgelegt von

Leon Focker
geboren am 16.09.2000 in Radebeul

im August 2022

Klangsynthese II
Prüfer: Florian Zwissler

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Hausarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben. Sowohl inhaltlich als auch wörtlich entnommene Inhalte wurden als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in dieser oder vergleichbarer Form noch keinem anderem Prüfungsgremium vorgelegen.

Datum: _____ Unterschrift: _____

Inhaltsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung I

1 Einleitung **1**

2 Begriffsklärung **2**

3 Kategorisierung und Analyse **4**
3.1 Digitale Allpassfilter 4
3.1.1 FIR-Allpassfilter 4
3.1.2 IIR-Allpassfilter 4
3.1.3 IIR-Allpassfilter Erster Ordnung 5
3.1.4 IIR-Allpassfilter Zweiter Ordnung 7
3.1.5 IIR-Allpassfilter Höherer Ordnung 9

4 Anwendung **10**
4.1 Allpass-basierte Filterdesigns 10
4.2 Phaser 12
4.3 Digitaler Hall 12
4.4 Andere Anwendungen 13

1 Einleitung

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Klassifizierung und Analyse digitaler Allpassfilter und deren Anwendung im Design anderer Filtertypen. Für eine möglichst umfassende Analyse werden verschiedene Quellen zusammengeführt. Ein Ziel der Arbeit ist es, ein allgemeines Verständnis über Allpassfilter zu vermitteln, ohne, dass zusätzliches Material herangezogen werden muss. Zu Beginn soll ein kurzer Überblick über wesentliche Begrifflichkeiten gegeben werden. Wichtige Analyseschritte sind eigens visualisiert, um diese einheitlich und anschaulich darzustellen.

2 Begriffsklärung

Ganz zu Anfang dieser Arbeit sollten ein paar grundlegende Begriffe definiert werden, insbesondere, der des Allpassfilters. Dafür ist erst einmal der Begriff "Filter" wichtig:

Ein (elektronischer) **Filter** ist eine, ursprünglich aus der Elektro- und Nachrichtentechnik stammende Schaltung, "die ein elektrisches Signal abhängig von der Frequenz in der Amplitude und in der Phasenlage" verändert.[3] So können unerwünschte Signalteile abgeschwächt oder andere verstärkt werden. Filter können sowohl passiv oder aktiv, analog oder digital, diskret oder zeitlich kontinuierlich, linear oder nicht-linear und als IIR oder FIR Filter vorliegen.[4] Da Musik und Klang auch als Signale betrachtet werden können, die in elektronischer und digitaler Form vorkommen können, sind diese Art von Filtern auch für die Klangsynthese und -bearbeitung von großer Bedeutung. Wichtige Filtertypen sind Hoch- und Tiefpassfilter (welche jeweils nur den hohen oder tiefen Bereich eines Spektrums durchlassen), Kuhschwanzfilter (welche entweder den hohen oder tiefen Bereich eines Spektrums anheben oder absenken), Bandpass- oder Bandstopfilter (welche jeweils nur bestimmte Frequenzbänder passieren lassen oder auslöschen) und Glockenfilter (welche jeweils nur bestimmte Frequenzbänder verstärken oder absenken).

FIR-Filter: Ein Filter mit endlicher Impulsantwort (finite impulse response -> FIR), ist ein Filter, dessen Antwort auf einen Impuls (siehe Impulsantwort und Dirac-Stoß weiter unten) in einer endlichen Dauer auf Null sinkt. Die Impulsantwort eines diskreten FIR-Filters N-ter Ordnung dauert genau N + 1 Samples. FIR-Filter können sowohl zeitlich diskret oder kontinuierlich, und digital oder analog sein. FIR-Filter haben verschiedene Eigenschaften, die im Vergleich zu IIR-Filtern vorteilhaft sind. Sie benötigen zum Beispiel keine Feedback Implementation. Somit häufen sich keine Rundungsfehler, sondern es entsteht nur immer wieder der gleiche relative Fehler. Außerdem wird die Implementation so einfacher. Des Weiteren können sie sehr einfach linear designt werden - also mit linearem Phasengang. Der größte Nachteil von FIR-Filtern ist, dass sie in den meisten Fällen einen höheren Rechenaufwand für den Computer bedeuten, im Vergleich zu IIR-Filtern mit ähnlicher Güte. Das fällt besonders bei relativ tiefen Filterfrequenzen ins Gewicht.[6]

IIR-Filter: Ein Filter mit unendlicher Impulsantwort (infinite impulse response -> IIR), ist ein Filter, dessen Impulsantwort nach einer bestimmten Zeit nicht genau 0 wird, sondern unbestimmte Zeit länger anhält. In der Praxis nähert sich die Impulsantwort der meisten Filter jedoch Null und kann ab einem gewissen Punkt vernachlässigt werden. Digitale Filter zählen als IIR-Filter, sobald sie mit einem Feedback implementiert sind. Alle physischen, analogen Filter, bestehend aus Widerständen, Kondensatoren und/oder Induktoren sind streng

genommen IIR-Filter, da reale Bauteile nach einem Impuls nie wieder komplett in ihren Ruhezustand zurückkehren. Im Gegensatz zu FIR-Filtern sind IIR-Filter nicht automatisch stabil. Ihre Impulsantwort pegelt sich nicht unbedingt um Null ein. Theoretisch kann sie unendlich auf einem Level bleiben oder größere Werte erreichen.[10]

Ein **Allpassfilter** ist ein wichtiger Bestandteil, um verschiedenste (Audio-) Signalverarbeitungsprozesse zu bauen. Anders als andere Filter lässt er alle Frequenzen mit der gleichen Amplitude passieren. Der Frequenzgang ist also konstant für alle Frequenzen = 1. Der Phasengang ist dagegen erst einmal nicht näher festgelegt.[12] Allpassfilter können also auch als kurze frequenzabhängige Verzögerungen (=Delays) betrachtet werden. Die genauen Eigenschaften hängen von der Art des Filters ab und werden in Abschnitt 3.1 diskutiert.

Die **Transferfunktion**, auch **Systemfunktion** eines Filters ist die Funktion *H(z)*, mit der das Ausgangssignal *X(z)* multipliziert wird, um das gefilterte Signal *Y(z)* zu erhalten:

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

Dabei sind *X(z)*, *H(z)* und *Y(z)* jeweils die z-Transformierten von *x(n)*, *h(n)* und *y(n)*. Bei der **z-Transformation** findet eine Überführung eines diskreten (Sample-basierten) Signals von der Zeitebene in die Bildebene, bzw. die Spektralebene statt. Z ist hier eine komplexe Zahl, die die Magnitude und Phasenlage eines sinusoiden Signalbestandteils darstellt. Es besteht der Zusammenhang $x[n] = z^n$.[14] Die Transferfunktion ist also eine wichtige Methode, um Filter und ihre Auswirkung auf Signale zu verstehen.

Eine **Impulsantwort** *h[n]* ist die Reaktion bzw. das Ausgangssignal eines Systems, in das ein Dirac-Stoß geschickt wurde. Ein **Dirac-Stoß** oder **Dirac-Impuls** ist in der digitalen, diskreten Domäne ein einziges Sample mit Wert 1 $\rightarrow$ [1 0 0 0 0 ...]. Dieser wird "gern für theoretische Betrachtungen verwendet, da er ein unendlich weites, kontinuierliches Frequenzspektrum besitzt und das invariante Element der Faltung darstellt."[9] Wenn man ein Eingangssignal mit der Impulsantwort eines Systems faltet, erhält man ein Signal, das dem Ausgangssignal des Systems bei gleichem Eingangssignal entspricht. Die Systemfunktion *H(z)* kann über die z-Transformation aus der Impulsantwort berechnet werden. Es gilt[14]:

$$y[n] = h[n] * z^n = H(z)z^n$$

3 Kategorisierung und Analyse

3.1 Digitale Allpassfilter

Allpassfilter können digital sowohl als FIR als auch als IIR-Filter implementiert werden. Aufgrund des höheren praktischen Nutzens und größerer Flexibilität werden allerdings in den meisten Fällen IIR-Filter benutzt. Die simpelste Version eines Allpassfilters ist dabei kaum als Filter zu bezeichnen. Damit ein System als Allpassfilter gilt, muss lediglich die Bedingung erfüllt sein, dass alle Frequenzen gleichmäßig durchgelassen werden. Und diese ist erfüllt, wenn das Signal entweder unverändert gelassen (offensichtlich) oder die Phase um 180°, also π gedreht wird (das heißt die Phase des Signals wird invertiert). Theoretisch wäre die Bedingung auch erfüllt, wenn die Phase um einen beliebigen Wert gedreht wird. In der Transferfunktion $H(z) = e^{j\phi}$ würde dann ein beliebiges ϕ eingesetzt werden. In der Praxis ist das aber nicht möglich. ϕ ist also entweder 0 oder π und der ganz Term damit 1 oder -1. Die Transferfunktion ist dementsprechend[12]:

$$H(z) = \pm 1$$

3.1.1 FIR-Allpassfilter

Ähnlich simpel sehen FIR-Allpassfilter aus. An die oben genannte Transferfunktion wird ein weiterer Term angefügt: $H(z) = e^{j\phi} z^{-K}$. In der Praxis ist die Phase ϕ auch hier auf 0 oder π beschränkt. Der erste Term $e^{j\phi}$ ist also wieder gleich ± 1 und kann, bis auf das eventuelle Vorzeichen, gekürzt werden. K ist eine natürliche Zahl, die für die Verzögerung des Signals in Samples steht. Bei FIR-Allpassfiltern handelt es sich also immer um eine einfache Verzögerung des Signals, gegebenenfalls mit invertierter Phase.[12] Das einfachste Beispiel für einen FIR-Allpassfilter ist das *unit delay*:

$$H(z) = z^{-1}$$

3.1.2 IIR-Allpassfilter

Die Transferfunktion für IIR-Allpassfilter und allgemein IIR-Filter endlicher Ordnung baut auf den bereits vorgestellten Funktionen auf und bekommt einen neuen Term angehängt:

$$H(z) = e^{j\phi} z^{-K} \frac{\tilde{A}(z)}{A(z)}$$

Auch hier ist K eine natürliche Zahl. $A(z)$ ist ein Polynom im Stil $1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_N z^{-N}$ (N ist die Ordnung des Filters). $\tilde{A}(z)$ ist ein Polynom gleicher Ordnung mit

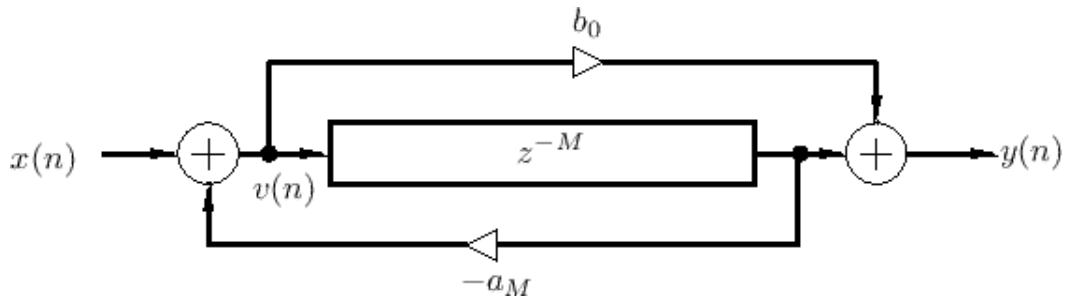


Abbildung 3.1: Diagramm eines Allpassfilters Erster Ordnung[12]

den Koeffizienten aus *A(z)* in umgekehrter Reihenfolge. Zusammenfassend kann jeder single-input-single-output Allpassfilter über ein Produkt aus dem Verstärkungsfaktor $e^{j\phi}$ bzw. ± 1, einer einfachen Verzögerung des Signals z^{-K} und einer IIR-Transferfunktion $\frac{\tilde{A}(z)}{A(z)}$ dargestellt werden.[12] Im Folgenden geht es um die Eigenschaften von IIR-Allpassfiltern bestimmter Ordnung.

3.1.3 IIR-Allpassfilter Erster Ordnung

Ein Allpassfilter Erster Ordnung liegt vor, wenn die IIR-Transferfunktion des Filters aus zwei Polynomen Erster Ordnung besteht. Die allgemeine Transferfunktion sieht also so aus:

$$H(z) = \pm \frac{a + z^{-M}}{1 + az^{-M}}$$

Man kann erkennen, dass die Koeffizienten $[a, 1]$ im zweiten Polynom vertauscht sind $[1, a]$. M ist hier die Verzögerung des Signales in Samples. Typischerweise wird $M = 1$ gesetzt. Praktisch kann dies als Verschaltung von zwei Kammfiltern mit der gleichen Verzögerungsleitung gesehen werden. Dabei ist einer der Filter rückkoppelnd, der andere vorkoppelnd zu implementieren. In Abbildung 3.1 ist das Blockdiagramm so eines Allpassfilters zu sehen. Außerdem müssen der Vor- und Rückkopplungsfaktor identisch sein (in der Gleichung ist das a, für Abbildung 3.1 gilt $a_M = b_0$).[12]

Die Gleichung für den vorkoppelnden Teil (der obere und der mittlere Strang in der Abbildung 3.1) ist $y(n) = b_0 v(n) + v(n - M)$. Die Gleichung für den rückkoppelnden Teil (der mittlere und untere Strang in der Abbildung 3.1) ist $v(n) = x(n) - a_M v(n - M)$. Setzt man v(n) in y(n) ein, erhält man die Differenzgleichung $y(n) = b_0 x(n) + x(n - M) - a_M y(n - M)$ für die komplette Verschaltung. Diese korrespondiert mit der allgemeinen Transferfunktion (siehe oben). Um von der Differenzgleichung die Transferfunktion zu erhalten, muss die z-Transformation durchgeführt werden.[12] Dies wird hier jedoch nicht weiter betrachtet.

Wichtig ist nun der Nachweis, dass die Magnitude jeder Frequenz des Ausgangssignals tatsächlich gleich bleibt. Um den Frequenzgang zu erhalten, wird $z = e^{j\omega}$ in die Transferfunktion

eingesetzt. ω steht hierbei für die Kreisfrequenz. Da es für den Frequenzgang nur um den Magnitudenbestandteil des Signals geht, wird der Betrag der komplexen Funktionswerte (in der polaren Form steht der absolute Wert (Betrag) einer komplexen Zahl für die Magnitude und der Winkel ϕ für die Phase des Signals) berechnet.

$$|H(e^{j\omega})| = |\frac{a + e^{-j\omega M}}{1 + ae^{-j\omega M}}| = |\frac{a + e^{j\omega M}}{a + e^{j\omega M}}| = 1$$

Das heißt, alle Frequenzanteile des Signals werden in der Magnitude mit 1 multipliziert. Dieser Faktor ist konstant und unabhängig von ω, also unabhängig von der Frequenz. Somit handelt es sich tatsächlich um einen Allpassfilter.[12][1]

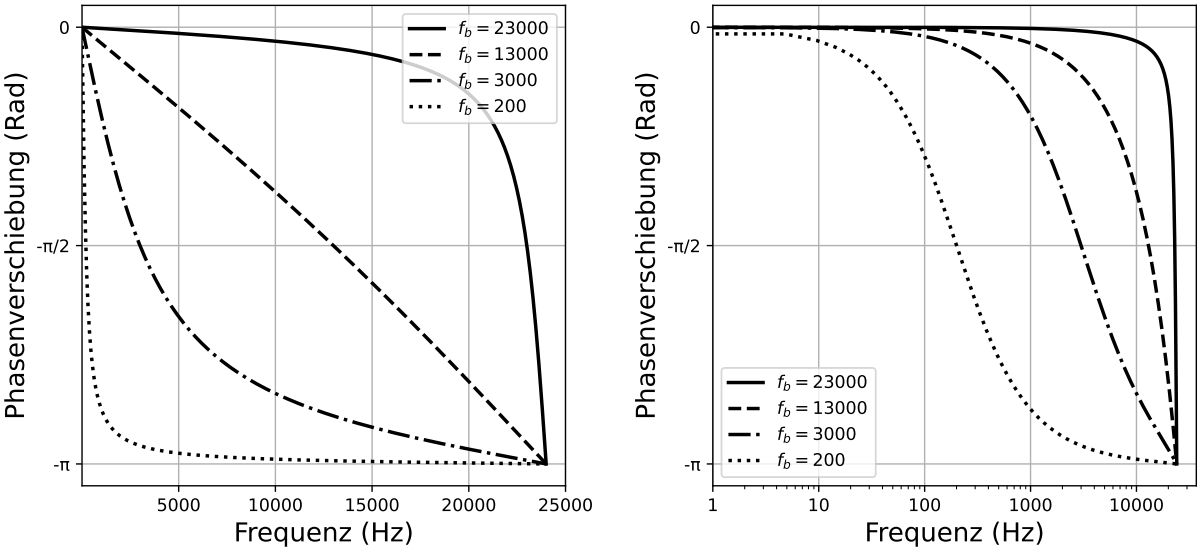
Phasengang Der Phasengang von Allpassfiltern Erster Ordnung ist nun deutlich komplexer als die der bisher betrachteten Versionen, da er nicht mehr konstant ist und auch nicht linear verläuft. Ein paar Eigenschaften können verallgemeinert werden. So ist die Phasenverschiebung der Gleichstromkomponente ($f = 0$) gleich 0. Die Phasenverschiebung bei der Hälfte der Samplingfrequenz (somit bei der Nyquistfrequenz) ist mit $-\pi\ rad$ die maximale Phasenverschiebung eines Allpassfilters Erster Ordnung. Die Phasenverschiebung an der so genannten Bruchfrequenz beträgt $-\frac{\pi}{2}\ rad$. Die Bruchfrequenz ist abhängig vom Filterkoeffizienten a. Wenn man den Filter als Verschaltung von Kammfiltern betrachtet, ist das der Faktor, mit dem das vor- und rückgekoppelte Signal multipliziert wird. Um eine bestimmte Bruchfrequenz zu erhalten, können die entsprechenden Koeffizienten mit der Gleichung

$$a \triangleq \frac{1 - \tan(\omega_b T/2)}{1 + \tan(\omega_b T/2)}$$

ermittelt werden.[12] Um den Phasengang zu ermitteln kann folgende Funktion benutzt werden[1][11]:

$$\Phi(\omega) = -\omega + 2\arctan\left(\frac{a\sin(\omega)}{1 + a\cos(\omega)}\right) \rightarrow \Phi(f) = -\frac{2\pi f}{f_s} + 2\arctan\left(\frac{a\sin(\frac{2\pi f}{f_s})}{1 + a\cos(\frac{2\pi f}{f_s})}\right)$$

Die Gleichung mit der Kreisfrequenz ω ist allgemeiner und wird vor allem für analoge Filter und allgemein kontinuierliche Signale verwendet. Für diskrete Signale ist die Verwendung der normalisierten Frequenz $\frac{2\pi f}{f_s}$ üblich, für welche man die Samplingfrequenz f_s benötigt. Um den Frequenzgang des Filters zu erhalten, wird der Betrag der Funktion betrachtet und damit nur die Magnitude der Frequenzen. Als nächstes ist der andere Bestandteil, nämlich die Phasenlage interessant. Das entspricht dem Winkel ϕ der jeweiligen komplexen Zahl. Dieser kann aus dem realen und imaginären Teil der Zahl berechnet werden: $arg(z) = arg(x + iy) = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.[2]. In die Transferfunktion $H(z)$ wird dafür $z = e^{j\phi} = \cos(\omega) + j\sin(\omega)$ eingesetzt. Dann wird die Funktion in den realen und imaginären Bestandteil aufgeteilt und beide Teile werden in die Formel für das komplexe Argument $arg(z)$ eingesetzt.[1][8] So sollte auch die obige Formel für $\Phi(\omega)$ herleitbar sein. Mit eben dieser Formel kann nun der Phasengang in einem Diagramm dargestellt werden.



(a) linear skalierte x-Achse.

(b) logarithmisch skalierte x-Achse.

Abbildung 3.2: Phasengang eines Allpassfilters Erster Ordnung

In verschiedenen Artikeln wird der Phasengang jeweils mit verschiedenen Skalierungen der Achsen und einer unterschiedlichen Auswahl an Bruchfrequenzen dargestellt.[1][12][11] So entsteht ein unterschiedlicher Eindruck, wie der Graph verläuft und wie variabel der Phasengang tatsächlich ist. Die Abbildung 3.2 zeigt eine große Varianz an Bruchfrequenzen und eben diesen möglichen Unterschied in der Darstellung. Die Graphen sind jeweils mit der zweiten Gleichung für $\Phi(f)$ und mit einer Samplingfrequenz von 48kHz gezeichnet.

3.1.4 IIR-Allpassfilter Zweiter Ordnung

Wenn mehrere Allpassfilter Erster Ordnung in Reihe geschaltet werden, addieren sich die Phasenverzögerungen. Sowohl $H_1(H_2(z))$, als auch $H_2(H_1(z))$ sind Allpassfilter, so lange $H_1(z)$ und $H_2(z)$ einen Allpassfilter beschreiben.[12] Somit können an der Nyquistfrequenz Verzögerungen von $-N\pi$ für N verkettete Allpassfilter Erster Ordnung erreicht werden.[1] Ein Allpassfilter Zweiter Ordnung hat folgende Transferfunktion:

$$H(z) = \pm\frac{b + az^{-1} + z^{-2}}{1 + az^{-1} + bz^{-2}}$$

Auch hier ist erkennbar, dass die Koeffizienten der Polynome in jeweils umgekehrter Reihenfolge vorkommen.[13]

Phasengang Beim Phasengang von Allpassfiltern Zweiter Ordnung, lassen sich Parallelen zu denen Erster Ordnung erkennen. Die Phasenverschiebung der Gleichstromkomponente

($f = 0$) ist weiterhin gleich 0. Die Phasenverschiebung bei der Hälfte der Samplingfrequenz liegt nun bei $-2\pi\, rad$ und ist an dieser Stelle auch bei Filtern Zweiter Ordnung maximal. Die Phasenverschiebung an der Bruchfrequenz hat sich ebenfalls verdoppelt und liegt bei $-\pi\, rad$. Im Gegensatz zu Filtern Erster Ordnung gibt es jetzt aber zwei Parameter, um den Phasengang zu beeinflussen. So kann mit einem die Bruchfrequenz und mit dem anderen die Steigung der Kurve (im Diagramm des Phasengangs) festgelegt werden.[1]

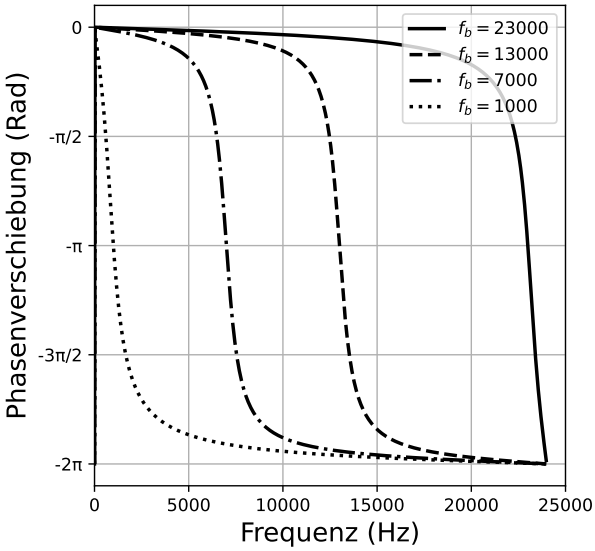
Um mit den Koeffizienten direkter auf die Bruchfrequenz und die Bandbreite Einfluss zu nehmen, kann die Transferfunktion leicht modifiziert werden:

$$H(z) = \frac{-a + b(1-a)z^{-1} + z^{-2}}{1 + b(1-a)z^{-1} - az^{-2}}$$

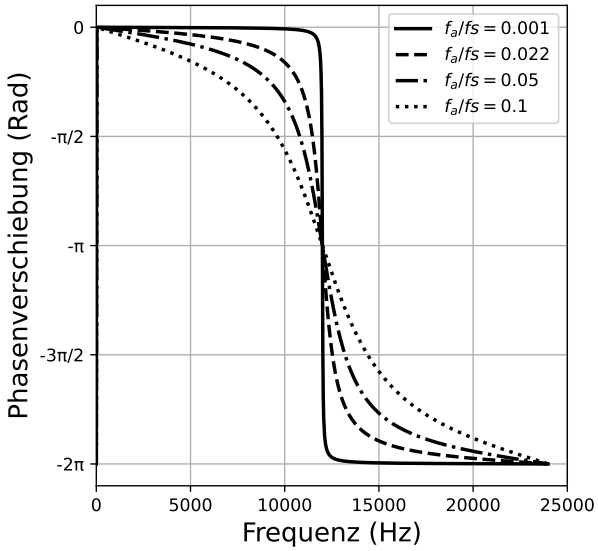
$$a = \frac{\tan(\pi f_a/f_s) - 1}{\tan(\pi f_a/f_s) + 1}$$

$$b = -\cos(2\pi f_b/f_s)$$

Der Koeffizient a bestimmt die Bandbreite des Filters, der Koeffizient b bestimmt die Bruchfrequenz f_b und kann über diese hergeleitet werden.[7] Abbildung 3.3 zeigt den Phasengang mit verschiedenen Bruchfrequenzen und Bandbreiten. Die in Abschnitt 3.1.3 beschriebene Herleitung ist schon für Filter Zweiter Ordnung sehr umfangreich. Stattdessen sind die Diagramme in Abbildung 3.3 mit der Funktion *scipy.signal.freqz* in Python erzeugt. Mit dieser kann eine Transferfunktion beliebiger Ordnung definiert und der komplexe Frequenzgang des Systems (als Datenpunkt mit Frequenz als Argument und komplexer Zahl als Wert) ermittelt werden. Wenn nun, zum Beispiel über *np.angle*, der Winkel ϕ der komplexen Zahlen (auch das komplexe Argument oder die Phase genannt) berechnet wird, kann anschließend der Phasengang gezeichnet werden.



(a) Verschiedene Bruchfrequenzen.



(b) Verschiedene Bandbreiten.

Abbildung 3.3: Phasengang eines Allpassfilters Zweiter Ordnung

3.1.5 IIR-Allpassfilter Höherer Ordnung

Die Gleichung aus Abschnitt 3.1.2 legt nahe, dass theoretisch Allpassfilter beliebiger Ordnung zusammengestellt werden können. Praktisch sind aber Allpassfilter Erster und Zweiter Ordnung für die meisten Anwendungsbereiche völlig ausreichend. Allpassfilter Höherer Ordnung bedeuten dahingegen eine Menge an Analyse und Rechenaufwand.[1]

4 Anwendung

4.1 Allpass-basierte Filterdesigns

Parametrische Filter sind eine Klasse an Filtern, deren Parameter wie zum Beispiel Filterfrequenz oder Filtergüte unabhängig und direkt durch einen oder zwei Koeffizienten in der Filtergleichung beeinflusst werden können. Sie sind besonders wichtig für Echtzeitanwendungen mit minimalem Rechenaufwand. Die Grundlage für parametrische Filter Erster und Zweiter Ordnung bilden Allpassfilter der Ersten und Zweiten Ordnung.[7]

Hoch- und Tiefpassfilter Ein Hoch- oder Tiefpass Erster Ordnung wird erzielt, indem das Ausgangssignal vom Eingangssignal eines Allpassfilters Erster Ordnung abgezogen / auf das Eingangssignal eines Allpassfilters Erster Ordnung addiert wird. Da sich die Phasenverzögerung des Ausgangssignals des Allpassfilters für hohe Frequenzen -180° annähert, werden diese beim Addieren ausgelöscht. Beim Subtrahieren werden sie verstärkt und die tieferen Frequenzen mit weniger Phasenverzögerung löschen sich aus. Die Transferfunktion eines solchen Filters ist[7]:

$$H(z) = \frac{1}{2}(1 \pm A(z)) \quad (TP/HP\ +/-)$$

$$A(z) = \frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$$

$$a = \frac{\tan(\pi f_c/f_s) - 1}{\tan(\pi f_c/f_s) + 1}$$

$A(z)$ ist hier der stimmbare Allpassfilter mit dem Koeffizienten a, ähnlich zu Abschnitt 3.1.3. Der Phasengang der jeweiligen Filter ähnelt dem des Allpassfilters, mit dem Unterschied, dass die Differenz zwischen minimaler und maximaler Verzögerung halbiert wird, also nur noch $\frac{1}{4}\pi$ beträgt. Der neue Phasengang ist praktisch der Durchschnitt des Phasengangs des Allpassfilters und des Eingangssignals (konstant). Dementsprechend ist beim Hochpass die Phase zusätzlich 180° rotiert (durch das Subtrahieren, also Invertieren des Signals und somit der Phase).[7]

Bandpass- und Bandstopfilter Um stimmbare Bandpass- und Bandstopfilter zusammenzustellen wird ein Allpassfilter Zweiter Ordnung benötigt. Die jeweilige Transferfunktion sieht so aus[7]:

$$H(z) = \frac{1}{2}(1 \mp A(z)) \quad (BP/KF\ -/+)$$

$$A(z) = \frac{-a + b(1-a)z^{-1} + z^{-2}}{1 + b(1-a)z^{-1} - az^{-2}}$$

$$a = \frac{\tan(\pi f_c/f_s) - 1}{\tan(\pi f_c/f_s) + 1}$$

$$b = -\cos(2\pi f_c/f_s)$$

Der Allpassfilter mit den Parametern a und b ist aus Abschnitt 3.1.4 bekannt. Das Funktionsprinzip ist hier das gleiche. Nur, dass die Phase des Ausgangssignal des Allpassfilters nicht an der Nyquistfrequenz, sondern an der Bruchfrequenz invertiert ist. Dementsprechend werden beim Addieren/Subtrahieren nur Frequenzen um diese Bruchfrequenz ausgelöscht / nicht ausgelöscht.[7]

Kuhschwanzfilter Kuhschwanzfilter (eng. shelving filter) können auch über einen Allpassfilter Erster Ordnung konstruiert werden. Die Flankensteilheit bei Filtern Erster Ordnung beträgt 6dB/Oktave. Diese kann durch Filterdesigns Höherer Ordnung erhöht werden. Die Transferfunktion für Kuhschwanzfilter Erster Ordnung ist[7]:

$$H(z) = 1 + \frac{H_0}{2}(1 \pm A(z)) \quad (TF/HF\ +/-)$$

$$A(z) = \frac{z^{-1} + a_{b/c}}{1 + a_{b/c}z^{-1}}$$

Der Parameter H_0 steuert hierbei, wie weit der jeweilige Bereich angehoben/abgesenkt wird. Er kann folgendermaßen hergeleitet werden. G steht für die Verstärkung in dB.[7]

$$H_0 = V_0 - 1 \ \ mit \ \ V_0 = 10^{G/20}$$

Die Koeffizienten a_b (für das Verstärken) und a_c (für das Abschwächen) werden jeweils einzeln hergeleitet.

Glockenfilter Ähnlich zu den Kuhschwanzfiltern lassen sich Glockenfilter mithilfe Allpassfiltern Zweiter Ordnung konstruieren. Die entsprechende Transferfunktion ist[7]:

$$H(z) = 1 + \frac{H_0}{2}(1 - A(z))$$

$$A(z) = \frac{-a_{b/c} + b(1 - a_{b/c}z^{-1} + z^{-2}}{1 + b(1 - a_{b/c})z^{-1} - a_{b/c}z^{-2}}$$

Der Koeffizient b bestimmt die Filterfrequenz. Die Verstärkung wird wieder durch H_0 bestimmt und genau so hergeleitet wie für Kuhschwanzfilter. Parameter a_b fürs Verstärken und a_c fürs Abschwächen werden wieder einzeln hergeleitet und bestimmen die Bandbreite des Filters. Insgesamt bietet dieses Filterdesign ziemlich unabhängige Kontrolle über die einzelnen Filterparameter.[7]

4.2 Phaser

Phaser-Effekte können sowohl über eine Serie von Kerbfiltern oder alternativ Allpassfiltern gebaut werden. Der Effekt basiert darauf, dass es durch die Verkettung verschiedener Allpassfilter Zweiter Ordnung mit verschiedenen Filterfrequenzen komplexe Phasenverschiebungen entstehen. Wenn dieses Signal mit dem ursprünglichen Signal addiert wird, werden entsprechend verschiedene Frequenzbereiche verstärkt oder abgeschwächt. Wenn die Filterfrequenzen der Allpassfilter zeitlich variieren, zum Beispiel moduliert durch einen LFO (low frequency oscillator), kommt es zum typischen *phasing*. Allpassfilter Erster Ordnung können auch für Phaser-Effekte benutzt werden, sind aber deutlich unflexibler. Sie kommen vor allem zu Emulation analoger Hardware Phaser zum Einsatz.[7]

4.3 Digitaler Hall

Der erste, der Allpassfilter als Werkzeug benutzt hat, um damit die komplexen Reflexionsmuster eines Halls zu imitieren war Manfred Schroeder. Dafür benutzt er die Verschaltung zweier Kammfilter, um einen Allpass zu erhalten, siehe Abschnitt 3.1.3. Grundsätzlich wird angenommen, dass die Allpassfilter für keine Färbung des Signals sorgen, was allerdings tatsächlich nur zutrifft, solange die Verzögerungsleitung der Kammfilter und damit die Impulsantwort des Filters viel kürzer ist, als das Ohr zeitlich differenzieren kann. Also deutlich kürzer als ca. 50 ms, besser sogar 10 ms. Sonst wird die Verzögerung, die durch die Allpassfilter stattfindet hörbar und beeinflusst so auch die Klangfarbe. Die Impulsantwort klingt dann ähnlich wie ein rückkoppelnder Kammfilter. Anhaltende Töne behalten aber, anders als bei Kammfiltern, die gleiche Lautstärke. Insgesamt soll der Allpassfilter in Hall-Effekten das Signal also zerstreuen, ohne es dabei zu färben, das heißt bestimmte Frequenzanteile zu verändern.[7][12] Abbildung 4.1 veranschaulicht den Effekt eines Allpassfilter Erster Ordnung (implementiert in Pure Data über zwei Kammfilter) auf einen Impuls und zeigt, inwiefern eine Zerstreuung stattfindet.

Der nächste Schritt im Design eines realistischen Hall-Effekts ist das Einführen einer Verzögerungsleitung von James Moorer, die an verschiedenen Stellen ausgelesen wird, um frühe Reflexionen zu imitieren. In seinem Design werden diese summiert und an eine Serie von Allpassfiltern und eine Parallelschaltung von Kammfiltern geschickt. Erstere sollen das Signal diffuser gestalten und letztere die Färbung realer Räume imitieren. Zusätzlich ersetzt Moorer die einfache Verzögerungsleitung der Kammfilter mit einem Tiefpassfilter, um den Absorptionseffekt der Luft nachzuahmen.[7]

(a) Ungefilterter Impuls

(b) Gefilterter Impuls, kurze Verzögerungsleitung, kleiner Koeffizient

(c) Gefilterter Impuls, kurze Verzögerungsleitung, größerer Koeffizient

(d) Gefilterter Impuls, längere Verzögerungsleitung, größerer Koeffizient

Abbildung 4.1: Impuls gefiltert durch einen Allpassfilter Erster Ordnung

4.4 Andere Anwendungen

Allpassfilter können allgemein eingesetzt werden, um alleinig den Phasengang von Signalen direkt zu beeinflussen. Eine Verwendung ähnlich zum normalen Equalizer ist denkbar, nur eben für die Phase, nicht den Frequenzgang eines Signals. Beispielsweise können verschiedene Mikrofone verschiedene, nicht-lineare Phasengänge haben. Werden diese Signale gemischt, kann es zu Auslöschung verschiedener Frequenzkomponenten kommen. Etwas unwahrscheinlicher, aber auch vorstellbar sind ähnliche Phänomene beim Aufstellen von Lautsprechern. Um die Phase bestimmter Frequenzen zu drehen und das Auslöschen von Frequenzen zu vermeiden kann ein Allpassfilter eingesetzt werden.[1] Auch ist der Einsatz von Allpassfiltern als kreativer Audioeffekt vorstellbar, der einzeln (durch hörbare Verzögerungszeiten) oder in Verschaltung (ähnlich wie bei einem Phaser) auch das Frequenzspektrum beeinflusst. Es gibt allerdings bisher kaum originelle Anwenderprogramme in diesem Bereich.[5]

Ein etwas ungewöhnlicherer Einsatz von Allpassfiltern ist der des Interpolierens zwischen Verzögerungszeiten. Verzögerungsleitungen sind in der digitalen, diskreten Domäne in der Länge auf Vielfache eines Samples beschränkt. Um auch Verzögerungen zwischen diesen Fixwerten zu bekommen, kann man zwischen den Ausgangssignalen einer Verzögerung um n samples und um $n + 1$ Samples interpolieren. Entweder über ein FIR-Filterdesign oder über einen Allpassfilter Erster Ordnung.[12]

Als besondere Form eines Allpassfilters und der Vollständigkeit halber soll hier noch die Hilberttransformation erwähnt werden. Diese ist ein wichtiges Werkzeug zur Analyse von Signalen und ist als solche zu komplex, um sie vollständig in dieser Arbeit zu behandeln. Zusammengefasst kann sie als Allpassfilter betrachtet werden, der die Phase von negativen Frequenzbestandteilen um 90° und die Phase von positiven Frequenzbestandteilen um −90° dreht.[12]

Literatur

[1] *Allpass Filter: All You Need To Know*. Zuletzt besucht am 28.07.2022. WolfSound. URL: https://thewolfsound.com/allpass-filter/.

[2] *Complex Argument*. Zuletzt besucht am 03.08.2022. Wolfram Mathworld. URL: https://mathworld.wolfram.com/ComplexArgument.html.

[3] *Computer*. Zuletzt besucht am 27.07.2022. Wikipedia. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Filter_(Elektrotechnik).

[4] *Electronic Filter*. Zuletzt besucht am 27.07.2022. Wikipedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_filter.

[5] Jon Fagerström. „Phase Equalizers - Overview and Experiments in Audio Processing“. In: ().

[6] *Finite impulse response*. Zuletzt besucht am 27.07.2022. Wikipedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_impulse_response.

[7] Germany Helmut Schmidt University – University of the Federal Armed Forces Hamburg. *DAFX - Digital Audio Effects*. Hrsg. von Udo Zölzer. John Wiley & Sons, 2011.

[8] *How to plot magnitude and phase response by hand if I have the Transfer Function?* Zuletzt besucht am 03.08.2022. Stackexchange. URL: https://dsp.stackexchange.com/questions/30480/how-to-plot-magnitude-and-phase-response-by-hand-if-i-have-the-transfer-function.

[9] *Impulsantwort*. Zuletzt besucht am 03.08.2022. Wikipedia. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Impulsantwort.

[10] *Infinite impulse response*. Zuletzt besucht am 27.07.2022. Wikipedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Infinite_impulse_response.

[11] Roope Kiiski, Fabian Esqueda und Vesa Välimäki. „Time-Variant Gray-Box Modeling of a Phaser Pedal“. In: (Sep. 2016). URL: https://www.researchgate.net/publication/308034849_Time-Variant_Gray-Box_Modeling_of_a_Phaser_Pedal.

[12] Julius O. Smith. *Physical Audio Signal Processing*. online book, 2010 edition, Zuletzt besucht am 28.07.2022. http://ccrma.stanford.edu/~jos/pasp/.

[13] Richard Taylor. „Second Order Allpass Filters for Phase Alignment“. In: (2015).

[14] *z-Transformation*. Zuletzt besucht am 28.07.2022. TU Wien. URL: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjxnu3c55v5AhVIMewKHVIlAWEQFnoECAkQAQ&url=https%3A%2F%2Fti.tuwien.ac.at%2Fcps%2Fteaching%2Fcourses%2Fdspv%2Ffiles%2FDSP_7-z-Transformation.pdf&usg=AOvVaw3PxU1KlWhP_95fjax89v7E.